TD_{13} – Variables aléatoires discrètes

Exercice 1 ★

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

1. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.
2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(X = n) = u_n$.
   X admet-elle une espérance ? Une variance ? Mêmes questions pour la variable aléatoire $\sqrt{X}$.

Exercice 2 ★

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $(\mathbb{P}(X = n))_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique.

Montrer que X suit une loi géométrique.

Exercice 3 ★

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{4}{n}\mathbb{P}(X = n - 1).$$

Trouver la loi de X et son espérance.

Exercice 4 ★★

Une urne contient n, $n \geqslant 3$, boules indiscernables au toucher, deux sont blanches et les autres sont noires. On tire une à une, et sans remise, les n boules de l'urne. X est la variable aléatoire égale au rang de la première boule blanche tirée. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 5 ★★

On considère un point M se déplaçant sur un axe d'origine O, en partant de O et par sauts d'une unité vers la droite avec la probabilité p et vers la gauche avec la probabilité q (avec $p \in]0, 1[$ et $p + q = 1$), les sauts étant supposés indépendants. Soit X_n la variable aléatoire réelle égale à l'abscisse du point à l'issue du n-ième déplacement.

Préciser la loi de X_n, son expérience, sa variance.

Exercice 6 Moments exponentiels ★★

1. Soit $\alpha > 0$ et $p \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \geqslant K$, $x^p \leqslant \mathrm{e}^{\alpha x}$.
2. Soit X une variable aléatoire réelle. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\mathrm{e}^{\alpha|X|}$ admet une espérance. Montrer que X admet alors des moments à tout ordre.

Exercice 7 ★★

N urnes comportent chacune des jetons numérotés de 1 à n. On tire au hasard un numéro dans chaque urne, et on appelle X le plus grand des numéros tirés.

1. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
2. Trouver la loi de X.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$. Quelle est la limite de $\dfrac{\mathbb{E}(X)}{n}$ quand n tend vers $+\infty$? En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Quelle est la limite de $\mathbb{E}(X)$ lorsque N tend vers $+\infty$? Commenter.

Exercice 8 ★★

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X>k) - n\mathbb{P}(X>n)$.
2. En déduire que si X admet une espérance, alors $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>k)$.
3. Montrer de même que, si X admet une variance, alors $\mathbb{E}(X^2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)\mathbb{P}(X>k)$.
4. On dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. On effectue à partir de cette urne, n tirages successifs indépendants d'une boule, avec remise, et on note X le plus grand nombre obtenu. Calculer l'espérance de X. Préciser la loi de X. Déterminer un équivalent de $\mathbb{E}(X)$ lorsque N tend vers l'infini.

Exercice 9 ★★

Partie I — Préliminaires.

Soient $(a,b) \in]0,1[^2$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$

On pose $A = -M + (a-b)I_2$ et $B = M - I_2$.

1. Vérifier que pour $n \geqslant 1$ on a $A^n = (a-b-1)^{n-1}A$ et $B^n = (a-b-1)^{n-1}B$.
2. Calculer AB et BA.
3. Trouver des constantes k_1 et k_2 telles que $(a-b-1)M = k_1A + k_2B$.
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a-b-1)M^n = A + (a-b)^n B$.

Partie II — Probabilités.

La règle de conduite pour la consommation de bonbons de Monsieur M. est la suivante :

— si le n-ième jour il mange du caramel, alors la probabilité qu'il en mange le $(n+1)$-ième jour est $\dfrac{1}{2}$.

— si le n-ième jour il ne mange pas de caramel, alors la probabilité qu'il en mange le $(n+1)$-ième jour est $\dfrac{4}{5}$.

On suppose que le jour 0 il n'en mange pas et on note :

$$u_n = \mathbb{P}(\text{Mr M. en mange le } n\text{-ième jour}) \qquad v_n = \mathbb{P}(\text{Mr M. n'en mange pas le } n\text{-ième jour})$$

1. Exprimer u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n.
2. Écrire une relation matricielle entre $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$
3. Calculer u_n en fonction de n et en déduire la limite de u_n quand $n \to +\infty$.
4. Pendant une année, en moyenne combien de jours Monsieur M. mange t-il des caramels ?

Exercice 10 ★★★

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Montrer que $\mathbb{P}(X \text{ est pair }) \geqslant \mathbb{P}(X \text{ est impair })$.

Exercice 11 ★

On lance simultanément deux dés, jusqu'à ce que les deux dés donnent le même nombre. On note X le nombre de lancers nécessaires. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 12 Absence de mémoire de la loi géométrique ★★

Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
Montrer que pour $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\mathbb{P}(X > m+n | X > n) = \mathbb{P}(X > n)$. Interpréter ce résultat.

Exercice 13 ★★

On dispose de n sacs numérotés de 1 à n. Chaque sac contient $n+1$ jetons. Dans le k-ième sac se trouvent k jetons gagnants, les autres étant perdants. Un joueur choisit au hasard un sac et y pioche un jeton.

1. Quelle est la probabilité que le jeton tiré soit gagnant ?
2. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, sachant que le jeton tiré est gagnant, quelle est la probabilité que le tirage ait eu lieu dans le sac numéro k ?

Exercice 14 ★

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, et soit $Y = \dfrac{1}{X}$. Y admet-elle une espérance ? Si oui la calculer.
2. Soit Z une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Montrer que $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{Z+1}\right)$ existe et la calculer.

Exercice 15 ★★

On dispose d'une pièce qui tombe sur « pile »avec probabilité p. On la lance jusqu'à faire « face », et on note X le nombre de lancers nécessaires. Quelle est la probabilité que ce nombre de lancers soit pair ?

Exercice 16 Le concierge alcoolique ★★

Un concierge possède 10 clés sur son trousseau.
Lorsqu'il souhaite ouvrir une porte, il choisit une clé au hasard dans son trousseau jusqu'à obtenir la bonne. Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de clés à essayer par le concierge pour ouvrir une porte.

1. Déterminer la loi de X si le concierge essaie les clés sans remise, puis la loi de X s'il les essaie avec remise.
2. Le concierge essaie les clés sans remise s'il est sobre et avec remise s'il est ivre. Le concierge est ivre un jour sur 3.
   (a) Montrer que X admet une espérance, et la déterminer.
   (b) Aujourd'hui, le concierge a eu besoin de 6 essais pour ouvrir sa porte. Quelle est la probabilité qu'il soit ivre ?
   (c) Même question avec 11 essais.

Exercice 17 ★★★★

On dispose de n urnes $U_1, U_2, \ldots, U_n$, et on dispose 3 boules dans chaque urne.
Dans l'ensemble des $3n$ boules, une seule est bleue, les autres sont rouges.
Sachant que l'on a tiré sans remise deux boules rouges dans l'urne U_1, quelle est la probabilité que la boule bleue se trouve dans l'urne U_2 ?

Exercice 18 ★★★★

Soit X une variable aléatoire discrète admettant des moments jusqu'à l'ordre 4 et telle que $\begin{cases} \mathbb{E}(X) = \alpha \\ E\left(X^2\right) = \mathbb{E}(X^4) = 1 \end{cases}$

1. Montrer que $\alpha \in [-1, 1]$.
2. Déterminer la loi de X.

Exercices issus d'oraux

Exercice 19 ★★★

(*Oral 2017*)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{m, \cdots, n\}$.

1. Montrer que $\mathbb{E}(X) = m + \sum_{k=m}^{n-1} \mathbb{P}(X > k)$
2. On tire avec remise une boule dans une urne qui en contient n numérotées de 1 à n. On note X le rang du tirage où l'on obtient un numéro supérieur ou égal au précédent.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}(X > k) = \dfrac{\binom{n}{k}}{n^k}$.
   (b) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 20 ★★★

(*Oral 2017*)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et X la variable aléatoire qui compte le nombre d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $p \in]0, 1]$, pour avoir k succès.

1. Préciser la loi de X si $k = 1$.
2. Déterminer la loi de X dans le cas général.
3. Pour $k = 2$, déterminer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

Exercice 21 ★★★

(*Oral 2019*)

On considère un dé équilibré à 6 faces. On réalise une succession de lancers de sorte que, si le numéro obtenu est strictement supérieur au numéro précédent, on continue, sinon on s'arrête. On note Ω l'univers correspondant à cette expérience aléatoire que l'on ne cherchera pas à expliciter et on note X la variable aléatoire qui compte de nombre de lancers réalisés.

1. Déterminer $X(\Omega)$
2. Calculer $\mathbb{P}(X > n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer la loi de X.
4. Calculer $\mathbb{E}(X)$, puis $\mathbb{E}(X^2)$.

Exercice 22 ★★★

(*Oral 2019*)

. On considère deux urnes U_0 et U_1 contenant respectivement 3 boules numérotées 0 et 3 boules numérotées 1 . On nomme échange l'action consistant à tirer une boule dans chaque urne et à les changer d'urne.

On note X_n la variable aléatoire indiquant la valeur de la somme des numéros des boules contenues dans l'urne U_1 après le n-ième échange.

1. Déterminer $X_n(\Omega)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0)$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1)$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = 2)$ et $\mathbb{P}(X_{n+1} = 3)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_n = 0)$, $\mathbb{P}(X_n = 1)$, $\mathbb{P}(X_n = 2)$ et $\mathbb{P}(X_n = 3)$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note U_n, A, L et J définis par

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1/9 & 0 & 0 \\ 1 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1 \\ 0 & 0 & 1/9 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $LA = \alpha L + \beta J$.
4. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$
5. En déduire une expression de $\mathbb{E}(X_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{E}(X_n)$, pour $n \in \mathbb{N}$.
6. En déduire l'expression de $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.